Programming Languages: Functional Programming
Practicals 7. Types and Logic

Shin-Cheng Mu

Autumn, 2023

1. Prove the following propositions:
   (a) $\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \to \mathsf{P}$.
   (b) $(\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \to \mathsf{R}) \to \mathsf{Q} \to \mathsf{P} \to \mathsf{R}$.
   (c) $(\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{R}) \to \mathsf{P} \to \mathsf{R}$.
   (d) $\mathsf{P} \to (\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \to (\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \to \mathsf{R}) \to \mathsf{R}$.
   (e) $(\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \to \mathsf{R}) \to (\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \to \mathsf{R}$.
   (f) $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \to ((\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \to \mathsf{R}) \to \mathsf{R})$.
   (g) $(\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \to \mathsf{R}) \to (\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \to \mathsf{P} \to \mathsf{R}$.

2. Reduce the following expressions to normal form, if possible.
   (a) $(\lambda x \,.\, x + x)\; 3$.
   (b) $(\lambda f\, x \,.\, f\; x\; x)\; (\lambda y\, z \,.\, y + z)\; 3$.
   (c) $(\lambda x \,.\, x\; x)\; (\lambda x \,.\, x)$.
   (d) $(\lambda x \,.\, x\; x)\; (\lambda x \,.\, x\; x)$.
   (e) $(\lambda x \,.\, f\; (x\; x))\; (\lambda x \,.\, f\; (x\; x))$.

3. Write down the type derivation trees of the following expressions, if possible.
   (a) $(\lambda x\, y \,.\, x)$.
   (b) $(\lambda p \,.\, (\mathit{snd}\; p, \mathit{fst}\; p))$.
   (c) $(\lambda f\, g\, x \,.\, f\; x\; (g\; x))$.
   (d) $(\lambda x \,.\, x\; x)\; (\lambda x \,.\, x\; x)$.

4. Given the following types, construct (simply typed) lambda expressions having the types.
   (a) $(P \to Q \to R) \to Q \to P \to R$.
   (b) $(P \wedge Q) \to ((P \vee Q) \to R) \to R$.